ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΖΕΥΓΗ

$(\alpha,\beta) = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$: διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο μέλος το α κ' δεύτερο μέλος το β.

Πρόταση: $\forall\, \alpha,\beta,\gamma,\delta$ ισχύει:

$$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \iff \begin{cases} \alpha=\gamma \\ \beta=\delta \end{cases}$$

Απόδειξη:

$\Leftarrow$) αν $\alpha=\gamma$ κ' $\beta=\delta$, τότε προφανώς $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$

$\Rightarrow$) Υποθέτουμε $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$

Δηλαδή ότι $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$

Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) $\boxed{\alpha=\beta}$

Τότε το $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\alpha\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha\}\}=\{\{\alpha\}\}$

$\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\}\}$

Έχουμε ότι $\{\gamma\}\in\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$

άρα $\{\gamma\}=\{\alpha\}$

Επόμενων $\gamma\in\{\gamma\}$ προκύπτει ότι $\gamma\in\{\alpha\}$ άρα $\boxed{\gamma=\alpha}$

Επίσης $\{\gamma,\delta\}\in\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\}\}$

άρα $\{\gamma,\delta\}=\{\alpha\}$

Επόμενων $\delta\in\{\gamma,\delta\}$ προκύπτει $\delta\in\{\alpha\}$ άρα $\boxed{\delta=\alpha}$ κ' άρα $\boxed{\beta=\delta}$

(ii) $\boxed{\alpha\neq\beta}$

Τότε $\{\alpha,\beta\}\in\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$

$\{\alpha,\beta\}\in\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$

άρα $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma\}$ ή $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma,\delta\}$

απορρίπτεται γιατί αν ισχύει $\{\alpha,\beta\} = \{\gamma\}$, τότε $\alpha \in \{\alpha,\beta\} = \{\gamma\}$

$\Rightarrow \alpha=\gamma$

κ' $\beta \in \{\alpha,\beta\} = \{\gamma\}$

$\Rightarrow \beta=\gamma$

$\alpha=\beta$ άτοπο.

Άρα $\{\alpha,\beta\} = \{\gamma,\delta\}$

Επίσης, $\{\gamma\} \in \{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$

άρα $\{\gamma\}=\{\alpha\}$ ή $\{\gamma\}=\{\alpha,\beta\}$, απορρίπτεται γιατί $\alpha\neq\beta$

Άρα, $\{\gamma\}=\{\alpha\}$ επίσης $\alpha\in\{\alpha\}=\{\gamma\}$

προκύπτει $\boxed{\alpha=\gamma}$

Επίσης $\alpha=\gamma$ από τη σχέση $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} = \{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$

προκύπτει ότι:

$\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\} = \{\{\alpha\},\{\alpha,\delta\}\}$

όπως δείξαμε πριν $\{\alpha,\beta\}=\{\gamma,\delta\}$ κ' αφού $\alpha=\gamma$ έχουμε $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\delta\}$

$\beta\in\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\delta\} \Rightarrow \beta=\alpha$ ή $\beta=\delta$,

όμως $\alpha\neq\beta$, άρα $\boxed{\beta=\delta}$

Παρατήρηση: Έστω Ω ένα βασικό σύνολο

(i) Αν $A\subseteq\Omega$, τότε $\Omega=A\cup A^c$ κ' A, A^c ξένα.

(ii) Αν $A,B\subseteq\Omega$ τότε

$$\Omega = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$$

Ω	A	A^c
B	$A\cap B$	$A^c\cap B$
B	$A\cap B^c$	$A^c\cap B^c$

Με τα σύνολα $A\cap B, A^c\cap B, A\cap B^c,$
$A^c\cap B^c$

Κάθε σύνολο που μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των A, B κ' πράξεις συνόλων θα είναι η ένωση κάποιων από τα παραπάνω τεσσάρων συνόλων.

Αν θέλουμε να αποδείξουμε οποιαδήποτε ισότητα που περιλαμβάνει δύο μόνο σύνολα, τα εκφράζουμε ως ένωση των παρακάτω

1.X Αν $A, B \subseteq \Omega$. Νδο:

$(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$

Το δεύτερο μέλος είναι:

- $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

Το πρώτο μέλος είναι:

- $(A^c \cup B) \cap (A \cup B)^c = ((A^c \cup B) \cap A) \cup ((A^c \cup B) \cap B^c) =$

$= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \cup (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

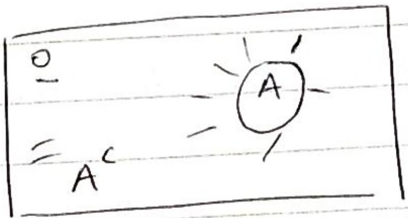
→ Ομοίως αν $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$

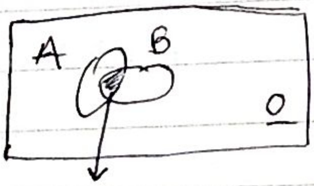
$\Omega = (A \cap B \cap \Gamma) \cup (A \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A \cap B^c \cap \Gamma) \cup (A \cap B^c \cap \Gamma^c) \cup (A^c \cap B^c \cap \Gamma) \cup$
$(A^c \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A^c \cap B^c \cap \Gamma^c)$

κ' τα οχτώ σύνολα είναι ξένα ανά δύο.

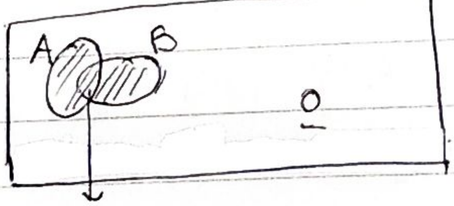
$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B$
$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c$
$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VENN

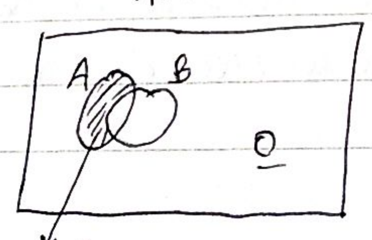




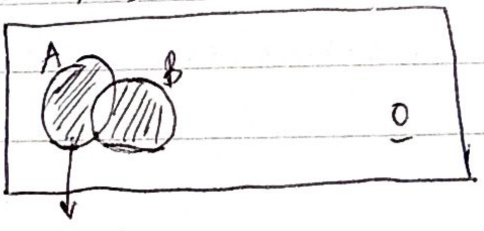
$A \cap B$



$A \cup B$



$A - B$



$A \Delta B$

Σημείωση:

Η χρησιμότητα των διαγραμμάτων Venn είναι ότι μας προσφέρουν εποπτεία (μας δίνουν μια εικόνα)

Σε καμία περίπτωση δεν υποκαθιστούν την απόδειξη. (μας δίνουν όμως κάποια ένδειξη για την αλήθεια κάποιων σχέσεων)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν x, y είναι υποσύνολα του A (δηλ $x, y \in P(A)$) τότε τα σύνολα $x \cap y$, $x \cup y$, $x - y$, $y - x$, $x \Delta y$ είναι επίσης υποσύνολα του A, άρα ανήκουν στο $P(A)$

ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ Κ' ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ

Πολλές φορές τα σύνολα που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα είναι υποσύνολα ενός δοθέντος συνόλου Ω. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι το Ω είναι βασικό σύνολο.

$A, B \in P(\Omega)$ τότε $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A \Delta B \in P(\Omega)$

Αν $A \in P(\Omega)$ τότε το σύνολο $\Omega - A$ λέγεται συμπλήρωμα του A. κ' συμβολίζεται με A^c.

Έτσι $A^c = \Omega - A = \{x : x \in \Omega \wedge x \notin A\}$.

Ιδιότητες:

Αν A είναι υποσύνολο ενός βασικού συνόλου Ω. τότε ισχύουν:

1) $A \cup A^c = \Omega$

2) $A \cap A^c = \emptyset$

3) $(A^c)^c = A$

Απόδειξη:

1) Έστω τυχαίο x, $x \in \Omega \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge \overbrace{(x \in A \wedge x \notin A)}^{\text{πάντα αληθής}} \Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \in A) \vee (x \in \Omega \wedge x \notin A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in A^c \Leftrightarrow x \in A \cup A^c$

2) Αν $A \cap A^c \neq \emptyset$ τότε $\exists x \in A \cap A^c$, άρα $x \in A \wedge x \notin A$ άτοπο. Άρα $A \cap A^c = \emptyset$

3) Έστω τυχαίο x, $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \notin A^c \Leftrightarrow x \in \Omega \wedge (x \notin \Omega - A) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \Omega \wedge (x \notin \Omega \vee x \in A) \Leftrightarrow \underbrace{(x \in \Omega \wedge x \notin \Omega)}_{\text{ψευδής}} \vee (x \in \Omega \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in A$

Ιδιότητες:

Αν A, B υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω. Τότε ισχύουν:

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

2) $A - B = A \cap B^c$

3) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

4) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

} είναι του De Morgan

Απόδειξη: όλα τα x που αναφερόμαστε ανήκουν στο Ω.

1) Χρησιμοποιούμε την ταυτολογία $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$ αντιθετοαντιστροφή.

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ((\sim x \in B) \Rightarrow (\sim x \in A))$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall (x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$

$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

2) $x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge (x \in \Omega \wedge x \notin B)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B^c) \Leftrightarrow x \in A \cap B^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$

Άσκηση. Να δειχθεί η ισοδυναμία

$(A \cap B) \cup \Gamma = A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow \Gamma \subseteq A$.

Απόδειξη:

Αντίστροφο "$\Leftarrow$": Υποθέτουμε ότι $\Gamma \subseteq A$, τότε $\Gamma \cap A = \Gamma$ κ' $A \cup \Gamma = A$

Έτσι $(A \cap B) \cup \Gamma \underset{\text{επιμεριστική της ένωσης προς την τομή}}{=} (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = A \cap (B \cup \Gamma)$

"$\Rightarrow$": Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύει $(A \cap B) \cup \Gamma = A \cap (B \cup \Gamma)$

$\Gamma \subseteq (A \cap B) \cup \Gamma = A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq A$,

άρα $\Gamma \subseteq A$.